

Diss. ETH No. 21881

# Optimality-Based Trajectory Generation and Periodic Learning Control for Quadcopters

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by

**MARKUS HEHN**

Diplom-Ingenieur, Technische Universität Darmstadt

born 14<sup>th</sup> March 1985  
citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Raffaello D'Andrea, examiner

Prof. Dr. Vijay Kumar, co-examiner

Prof. Dr. Roy Smith, co-examiner

2014

# Abstract

This thesis considers the design of algorithms for the autonomous flight of quadcopters and related multi-rotor vehicles. These flying vehicles have proven popular as small-scale aerial robotics platforms because they combine mechanical simplicity and robustness, the ability to hover, and exceptional agility.

The algorithms proposed herein perform two tasks: 1) they generate high-performance flight trajectories that satisfy the dynamic and input constraints of quadrotor vehicles; and 2) they track a given, periodic trajectory with high accuracy by using past data.

The first part of this thesis presents several algorithms centered around the problem of generating flight trajectories for quadcopters. The first algorithm presented here is a benchmarking tool (Paper I). Its aim is to quantitatively answer questions surrounding achievable performance, influence of design parameters, and performance assessment of control strategies in the design process of quadrotor systems. The algorithm allows the computation of quadrotor maneuvers that satisfy Pontryagin's minimum principle with respect to time-optimality. Such maneuvers provide a useful lower bound on the duration of maneuvers, which can be used to assess performance of controllers and vehicle design parameters. Computations are based on a two-dimensional first-principles quadrotor model. The minimum principle is applied to this model to find that time-optimal trajectories are bang-bang in the thrust command, and bang-singular in the rotational rate command. The algorithm allows the computation of time-optimal maneuvers for arbitrary initial and final states by solving the boundary value problem induced by the minimum principle.

While the benchmarking algorithm provides valuable insight in the design stage, its computational complexity and use of a two-dimensional model disqualifies it from planning flight trajectories dynamically. Dynamic trajectory planning is required for tasks subject to dynamic changes of the objective, where significant disturbances in the flight path may occur, or where knowledge of the environment becomes available only mid-flight. In such circumstances, it is necessary to quickly and robustly plan a new trajectory whenever new information becomes available. The second algorithm in this thesis is designed to satisfy such real-time requirements (Paper II). Its aim is to combine computational efficiency and the ability to plan fast motions from a large range of initial conditions to a target point that will be reached at rest. The approach consists of planning separate trajectories in each of the three translational degrees of freedom, and to ensure feasibility

by deriving decoupled constraints for each degree of freedom through approximations that preserve feasibility. This algorithm can compute a feasible trajectory within tens of microseconds on a laptop computer, and remaining computation time can be used to iteratively improve the trajectory. By replanning the trajectory at a high rate, the trajectory generator can be used as an implicit feedback law similar to model predictive control. The approach of decoupling the trajectory generation problem through feasibility-preserving approximations of the vehicle motion constraints is applicable to a broader class of trajectory generation problems, as is demonstrated by an extension to interception maneuvers (Paper III).

The second part of this thesis presents algorithms that use past data (measurements of past executions of the same motion) to improve tracking performance during the execution of periodic maneuvers under feedback control. The complex high-speed flight dynamics of quadcopters are typically simplified when designing feedback controllers, and are subject to large parameter uncertainties. This can lead to significant tracking errors during high-performance flight, and repeated execution typically leads to a majority of the tracking errors being repeated. This part of the thesis introduces iterative learning schemes that non-causally compensate repeatable trajectory tracking errors during the repeated execution of periodic flight maneuvers (Papers IV & V). The schemes augment conventional feedback controllers by providing additional feedforward correction inputs based on data gathered during past executions. The learning is carried out in the frequency domain, and is based on a Fourier series decomposition of the input and output signals. The algorithm is extended by a time scaling method that allows the transfer of learnt maneuvers to different execution speeds through a prediction of the disturbance change. This allows the initial learning to occur at reduced speeds, and thereby extends the applicability of the algorithm to high-performance maneuvers.

All algorithms presented in this thesis have been verified experimentally on small-scale quadcopters in the Flying Machine Arena test bed. These tests confirm the validity of modeling assumptions and show the real-world performance of the methods presented. The second part of this thesis features complimentary experiments designed to demonstrate the applicability of the learning algorithms developed earlier to more complex tasks: in this case, a quadcopter balancing an inverted pendulum (Paper VI).

These algorithms have also been featured in more than 150 live demonstrations at ETH Zurich and various international events, highlighting their robustness and reliability in real-world settings.

# Kurzfassung

Diese Dissertation präsentiert Algorithmen für den autonomen Flug von Quadrokoptern und ähnlichen Vielrotorfluggeräten. Auf Grund ihres simplen und robusten mechanischen Aufbaus, ihrer Schwebefähigkeit und ihrer ausserordentlichen Agilität haben sich derartige Fluggeräte zu beliebten Plattformen in der Flugrobotik entwickelt, und sind insbesondere im Bereich relativ niedriger Nutzlasten stark vertreten.

Die in dieser Arbeit präsentierten Algorithmen erfüllen zwei Aufgaben: 1) Die Berechnung von Flugtrajektorien unter Berücksichtigung der Dynamik und Aktuatorlimitationen von Quadrokoptern, sowie 2) das akkurate Folgen einer gegebenen periodischen Trajektorie durch Verwendung von Daten vorheriger Ausführungen.

Im ersten Teil der Dissertation werden mehrere Algorithmen zur Berechnung von Flugtrajektorien für Quadrokopter beschrieben. Ein erster Algorithmus dieser Kategorie dient zum Leistungsvergleich von Flugsystemen (Paper I). Ziel ist es hier, quantitative Antworten auf Fragen zur Leistungsfähigkeit von Flugsystemen und zum Einfluss von Systemparametern und -architektur auf die erzielbare Leistung zu berechnen. Der Algorithmus erlaubt die Berechnung von Flugmanövern, die die Optimalitätsbedingungen des Pontrjaginschen Maximumprinzips für die Minimierung der Manöverdauer erfüllen. Die so errechnete Manöverdauer stellt die Untergrenze für die Dauer des Manövers dar, und kann als Referenzwert für die Leistungsfähigkeit des Systems verwendet werden. Zur Berechnung der Manöver wird ein zweidimensionales Quadrokoptermodell verwendet. Anhand des Pontrjaginschen Maximumprinzips wird hergeleitet, dass die optimalen Steuersignale für den Gesamtschub immer maximal oder minimal sind, während jene für die Drehrate maximal, minimal oder durch eine Singularitätsbedingung gegeben sind. Der Algorithmus erlaubt die Berechnung von zeitoptimalen Flugmanövern für beliebige Anfangs- und Endzustände, indem das sich durch das Maximumprinzip ergebende Randwertproblem gelöst wird.

Der obige Algorithmus liefert wertvolle Informationen zur Auslegung von Flugsystemen, ist jedoch aufgrund seines hohen Rechenaufwandes und seiner Beschränkung auf ein zweidimensionales Modell für die dynamische Planung von Flugbahnen ungeeignet. Solch eine dynamische Planung ist nötig, wenn während der Ausführung eines Manövers Änderungen des Zielpunktes oder signifikante Störungen auftreten, oder neue Informationen zu Hindernissen in der Umgebung verfügbar werden. In solchen Szenarien ist es nötig, schnell und zuverlässig neue Flugbahnen zu planen sobald neue Informationen

zur Verfügung stehen. Der zweite in dieser Arbeit vorgestellte Algorithmus (Paper II) wurde in Hinsicht auf solche Echtzeitbedürfnisse entwickelt. Das Ziel ist in diesem Kontext, bei geringem Rechenaufwand schnelle Flugtrajektorien aus einem grossen Bereich von Anfangszuständen zu einem Zielpunkt, der im Stillstand erreicht wird, zu planen. Der hierfür verwendete Ansatz besteht aus einer Entkopplung der drei translatorischen Freiheitsgrade, wobei mittels Begrenzungen der Zustände und Stellgrössen der einzelnen Freiheitsgrade die dynamischen Eigenschaften des Quadropters berücksichtigt werden. So kann eine gültige Flugtrajektorie auf einem Laptop innerhalb von wenigen Mikrosekunden berechnet werden, und zusätzlich verfügbare Rechenzeit kann zur iterativen Verbesserung der Trajektorie verwendet werden. Das wiederholte Planen der Trajektorie mit hoher Frequenz erlaubt die Nutzung der Trajektoriengenerierung als impliziten Regelungsalgorithmus, und funktioniert in diesem Fall ähnlich wie eine modellprädiktive Regelung. Die Anwendbarkeit des Entkopplungsansatzes auf andere Trajektoriengenerierungsaufgaben wird in einer Erweiterung des Algorithmus anhand von Abfangtrajektorien demonstriert (Paper III).

Der zweite Teil dieser Dissertation präsentiert Forschungsergebnisse zu Algorithmen, die Daten aus vorherigen Experimenten verwenden um Fehler beim Folgen einer periodischen Referenztrajektorie zu reduzieren. Zur Auslegung von Flugreglern werden typischerweise vereinfachte Modelle der komplexen Flugdynamik von Quadroptern verwendet, die häufig mit signifikanten Parameterunsicherheiten behaftet sind. Hierdurch können sich grosse Folgefehler beim Flug von Hochleistungstrajektorien ergeben, die über mehrere Experimente hinweg zu grossem Teile wiederholbar sind. In diesem Teil der Arbeit werden Algorithmen präsentiert, die in diesem Falle die nicht-kausale Korrektur solcher wiederholbarer Folgefehler erlauben (Paper IV & V). Hierzu werden konventionelle Regler durch eine zusätzliche Vorsteuerung ergänzt, die Messdaten vorheriger Experimente verwendet. Das Lernen des Vorsteuerungssignals erfolgt im Frequenzbereich und basiert auf einer Fourierzerlegung der Eingangs- und Ausgangssignale des Systems. Zusätzlich wurde eine Zeitskalierungsmethode entwickelt, mit der der Lernprozess während des langsamen Ausführens des Manövers beginnen kann, und das gelernte Korrektursignal dann auf höhere Manövergeschwindigkeiten übertragen werden kann.

Alle in dieser Dissertation vorgestellten Algorithmen wurden mit Quadroptern in der Flying Machine Arena experimentell validiert. Diese Tests demonstrieren ihre Leistungsfähigkeit und bestätigen die in der Entwicklung der Algorithmen verwendeten Annahmen. Die Lernalgorithmen des zweiten Teils wurden weiterhin anhand von einem Experiment validiert, bei dem ein Quadropter ein inverses Pendel stabilisiert (Paper VI). Diese Experimente dienen dazu, die Anwendbarkeit der Methoden auf komplexere Fluganwendungen zu bestätigen.

Zusätzlich wurden die Algorithmen auch im Rahmen von Vorführungen sowohl an der ETH Zürich als auch an internationalen Veranstaltungen präsentiert. Über 150 Live-Demonstrationen bestätigen die Robustheit und Zuverlässigkeit der dargestellten Algorithmen.